VỀ MỘT LỚP KHÔNG GIAN CÁC HỌ SỐ KHẢ TỔNG

Kiều Phương Chi (1), **Mai Thế Tân** (2), **Dương Đức Kiên** (3)
1 *Khoa Toán - ứng dụng, Trường Đại học Sài Gòn*
2 *Phòng Giáo dục Quận 11, TP. Hồ Chí Minh*
3 *Khoa Khoa học cơ bản, Trường Cao đẳng Lý Tự Trọng, TP. Hồ Chí Minh*
Nhận bài ngày 02/12/2019, nhận đăng ngày 21/2/2020.

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng cấu trúc Banach cho lớp không gian các họ số khả tổng xác định bởi hàm Orlicz. Kết quả này là sự mở rộng tự nhiên những kết quả đã biết đối với không gian các dãy khả tổng đã được trình bày trong [3, 4, 5]...
Từ khóa: Họ khả tổng; không gian Orlicz.

1 Mở đầu

Trong giải tích hàm, lớp không gian các dãy có vai trò rất quan trọng. Lớp những không gian các dãy cổ điển được xét với dãy nhận giá trị trong trường vô hướng và các tính chất của chúng là những ví dụ khá điển hình của giải tích hàm cổ điển. Trong [3], các tác giả J. Lindenstrauss và L. Tzafriri đã xây dựng không gian Banach các dãy nhận giá trị vô hướng từ lớp các hàm thực đặc biệt dựa trên ý tưởng của Orlicz, chúng được gọi là các hàm Orlicz. Các tính chất của các không gian dãy Orlicz cũng được nghiên cứu khá sâu sắc thông qua cấu trúc của hàm Orlicz bởi J. Lindenstrauss và L. Tzafriri. Gần đây, lớp không gian này vẫn được quan tâm nghiên cứu và thu được nhiều ứng dụng sâu sắc trong giải tích hàm (xem [1], [2], [9]).

Các dãy số suy rộng (hay còn gọi là các họ số) là sự mở rộng tự nhiên của các dãy. Các họ số xuất hiện khá nhiều trong giải tích (xem [7, 8]). Một ví dụ điển hình của dãy số suy rộng là dãy các tổng theo các phân hoạch trong định nghĩa tích phân Riemann. Các họ số bị chặn, họ số khả tổng, họ số hội tụ tới 0,... được giới thiệu và nghiên cứu thấu đáo trong [8]. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày cách xây dựng không gian các họ số (dãy số suy rộng) xác định bởi hàm Orlicz. Chúng tôi muốn nhấn mạnh thêm rằng các kết quả trong bài báo này khi thay tập chỉ số tùy ý bởi tập chỉ số đếm được thì sẽ nhận được các kết quả cổ điển về không gian các dãy Orlicz.

Để tiện theo dõi, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ bản của không gian các họ số và hàm Orlicz.

Định nghĩa 1.1. ([8]) Tập $I \neq \emptyset$ được gọi là *định hướng* được nếu trên I đã xác định quan hệ ">" thỏa mãn các tính chất:

i) Với mọi $m, n, p \in I$ sao cho $m > n$, $n > p$ thì $m > p$;

ii) Với mọi $m \in I$ thì $m > m$;

iii) Với mọi $m, n \in I$, tồn tại $p \in I$ sao cho $p > m$ và $p > n$.

Khi đó, tập I được gọi là tập định hướng bởi quan hệ ">", ký hiệu $(I, >)$ hoặc viết tắt I.

1) Email: kieuphuongchi@sgu.edu.vn (K. P. Chi)

Ta dễ dàng chứng minh được mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.2. *([8]) Cho I là tập chỉ số tùy ý. Ký hiệu:*

$$\mathcal{F}(I) = \left\{ J \subset I : J \text{ hữu hạn} \right\}.$$

Trên $\mathcal{F}(I)$ định nghĩa quan hệ bao hàm ">" như sau:

$$\text{Với mỗi } J, K \in \mathcal{F}(I) : J > K \Leftrightarrow K \subset J.$$

Khi đó, $\mathcal{F}(I)$ với quan hệ bao hàm ">" là một tập định hướng.

([8]) Giả sử $(I, >)$ là tập định hướng. Khi đó, một hàm S xác định trên I được gọi là một *lưới* hay *dãy suy rộng* (hoặc họ số) và được ký hiệu là $(S, I, >)$ hoặc viết tắt là S.

Nếu miền giá trị của S là không gian tôpô thì nó được gọi là lưới trong không gian tôpô.

Định nghĩa 1.3. ([8]) Giả sử $(I, >)$ là tập định hướng. (X, τ) là không gian tôpô. Khi đó lưới $(S_n, I, >)$ được gọi là *hội tụ* trong không gian tôpô đến điểm S đối với tôpô τ nếu với mọi lân cận U của S đều tồn tại $n_0 \in I$ sao cho với mọi $n \in I$ mà $\forall n > n_0$ thì $S_n \in U$. Khi đó, ký hiệu $lim S_n = S$ hay $S_n \to S$.

Từ đây về sau, ta giả thiết I là tập chỉ số cho trước.

Định nghĩa 1.4. ([8]) Cho $\{x_i\}_{i \in I}$ là một họ các số thực hoặc phức. Họ $\{x_i\}_{i \in I}$ được gọi là *khả tổng* nếu dãy suy rộng $\{S_J\}_{J \in \mathcal{F}(I)}$ hội tụ đến S, trong đó $S_J = \sum\limits_{i \in J} x_i$. Khi đó ta viết

$$\sum_{i \in I} x_i = S$$

Nói cách khác, $\sum\limits_{i \in I} x_i = S$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại J_0 sao cho với mọi $J \in \mathcal{F}(I)$ mà $J > J_0$ thì

$$\left| \sum_{i \in J} x_i - S \right| < \varepsilon.$$

Trong bài báo này, ta dùng (x_i) hoặc $\{x_i\}$ để ký hiệu họ các số. Ta cần một số kết quả bổ trợ sau được trình bày trong [8].

Mệnh đề 1.5. *([8]) Nếu họ các số $\{x_i\}_{i \in I}$ tùy ý, tồn tại số $C > 0$ sao cho*

$$\left| \sum_{i \in J} x_i \right| < C, \forall J \in \mathcal{F}(I)$$

thì $\sum\limits_{i \in J} |x_i| < 4C$.

Mệnh đề 1.6. *([8]) Họ các số $\{x_i\}_{i \in I}$ là khả tổng khi và chỉ khi tồn tại $C > 0$ sao cho với mọi $J \in \mathcal{F}(I)$ thì $\left| \sum\limits_{i \in J} x_i \right| < C$.*

Từ Mệnh đề 1.7, ta thấy họ số $\{x_i\}_{i\in I}$ là khả tổng khi và chỉ khi họ $\{|x_i|\}_{i\in I}$ khả tổng. Đặc biệt

$$\sum_{i\in I}|x_i| = \sup\left\{\sum_{i\in J}|x_i| : J\in\mathcal{F}(I)\right\}.$$

Hơn nữa, nếu họ các số $\{x_i\}_{i\in I}$ là họ khả tổng thì mọi $x_i = 0$ trừ ra một tập đếm được.

Định nghĩa 1.7. ([8]) Họ các số $\{x_i\}_{i\in I}$ được gọi là bị chặn nếu tập $\{x_i : i\in I\}$ bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho $|x_i| < M$ với mọi $i\in I$.

Ký hiệu

$$l_\infty(I) = \left\{\{x_i\}_{i\in I} : \{x_i\}_{i\in I} \text{ bị chặn}\right\}$$

là tập hợp các họ bị chặn. Trên $l_\infty(I)$ trang bị các phép toán như sau:
Phép cộng: Với mọi $x = \{x_i\}_{i\in I}, y = \{y_i\}_{i\in I}\in l_\infty(I)$ ta định nghĩa

$$x + y = \{x_i + y_i\}_{i\in I}$$

Phép nhân vô hướng: Với mọi $x = \{x_i\}_{i\in I}\in l_\infty(I)$ và $\lambda\in\mathbb{K}$ ta định nghĩa

$$\lambda x = \{\lambda x_i\}_{i\in I}$$

Dễ dàng kiểm tra hai phép toán cho trên là xác định và với hai phép toán này $l_\infty(I)$ là một không gian tuyến tính. Hơn nữa $l_\infty(I)$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|x\| = \sup_{i\in I}|x_i|$$

Định nghĩa 1.8. ([8]) Họ các số $\{x_i\}_{i\in I}$ được gọi là hội tụ tới 0 nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $J_0\in\mathcal{F}(I)$ sao cho

$$|x_i| < \varepsilon, \forall i\in I\backslash J_0.$$

Ký hiệu

$$C_0(I) = \{\{x_i\}_{i\in I} : x_i \text{ hội tụ tới } 0\}$$

là không gian các họ hội tụ tới 0.

Mệnh đề 1.9. *([8]) $C_0(I)$ là không gian con đóng của $l_\infty(I)$.*

Với $p\geq 1$ đặt

$$l_p(I) = \left\{\{x_i\}_{i\in I} : \sum_{i\in I}|x_i|^p < \infty\right\}$$

là không gian các họ $p-$khả tổng. Dễ dàng kiểm tra được $l_p(I)$ là không gian con của $C_0(I)$. Hơn nữa, bản thân $l_p(I)$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i\in I}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Đặc biệt, khi $p = 2$ thì ta gọi $l_2(I)$ là không gian các họ các số bình phương khả tổng. Nó là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i\in I} x_i\overline{y_i}\,,\ \forall x, y \in l_2\,(I)\,.$$

Ta có kết quả sau về không gian liên hợp của không gian các họ các số được trình bày trong [7, 8].

Mệnh đề 1.10. *([8])*
1) $[C_0(I)]^* \cong l_1(I)$.
2) $[l_1(I)]^* = l_\infty(I)$.
3) $(l_p(I))^* = l_q(I), p > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Định nghĩa 1.11. ([3]) Hàm $M : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm Orlicz* nếu
1) M là hàm không giảm, liên tục;
2) $M(0) = 0$ và $\lim\limits_{t\to\infty} M\,(t) = \infty$;
3) M là hàm lồi.
Hàm Orlicz M gọi là *suy biến* nếu tồn tại $t > 0$ sao cho $M(t) = 0$.
Các hàm $M(t) = t^p; M(t) = te^t$ là những hàm Orlicz.

2 Không gian họ các số xác định bởi hàm Orlicz

Trong mục này, chúng tôi xây dựng cấu trúc không gian Banach cho tập hợp các họ khả tổng xác định bởi hàm Orlicz. Sau đó, nghiên cứu một số tính chất của lớp không gian con và mô tả cấu trúc của chúng khi hàm Orlicz suy biến.

Giả sử M là hàm Orlicz, $\mathbb{K}$ là trường các số thực hoặc số phức và I là tập chỉ số tùy ý. Ta ký hiệu

$$l_M(I) = \Big\{x = (x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{K} : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) < \infty, \ \ \text{với } \rho > 0 \text{ nào đó}\Big\}.$$

Phần tử $x = (x_i)_{i\in I}$ được viết gọn thành $x = (x_i)$. Ta có ngay kết quả sau.

Mệnh đề 2.1. $l_M(I) \subset l_\infty(I)$.

Chứng minh. Giả sử $l_M(I) \subsetneq l_\infty(I)$. Khi đó tồn tại $x = (x_i) \in l_M(I)$ không bị chặn. Khi đó, với mỗi $n = 1, 2, ...$ ta tìm được $|x_{i_n}| > n$. Vì $x \in l_M(I)$ nên tồn tại $\rho > 0$ sao cho $\sum_{i\in I} M\Big(\dfrac{|x_i|}{\rho}\Big) < \infty$. Suy ra tồn tại k sao cho $M\Big(\dfrac{|x_i|}{\rho}\Big) < k$ với mọi $i \in I$. Lấy $t_0 \in (0, \infty)$ sao cho $M(t_0) = k$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{i_n}| = \infty$ nên tồn tại n_0 sao cho $\dfrac{|x_{i_{n_0}}|}{\rho} > t_0$. Kéo theo

$$M\Big(\frac{|x_{i_{n_0}}|}{\rho}\Big) > M(t_0) = k.$$

Điều này mâu thuẫn với

$$M\Big(\frac{|x_{i_n}|}{\rho}\Big) < k$$

với mọi n. Vậy $l_M(I) \subset l_\infty(I)$. $\square$

Mệnh đề 2.2. *$l_M(I)$ là không gian tuyến tính với các phép toán cảm sinh từ $l_\infty(I)$.*

Chứng minh. Giả sử $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}, y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in l_M(I)$. Khi đó tồn tại $\rho_1, \rho_2 > 0$ sao cho

$$\sum_{\alpha\in I} M(\tfrac{|x_\alpha|}{\rho_1}) < \infty, \sum_{\alpha\in I} M(\tfrac{|y_\alpha|}{\rho_2}) < \infty$$

Lấy $\rho = \rho_1 + \rho_2$ ta có

$$\begin{aligned} M(\frac{|x_\alpha + y_\alpha|}{\rho}) &= M(\frac{|x_\alpha + y_\alpha|}{\rho_1 + \rho_2}) \\ &\leqslant M(\frac{|x_\alpha| + |y_\alpha|}{\rho_1 + \rho_2}) \\ &= M(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}\frac{|x_\alpha|}{\rho_1} + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\frac{|y_\alpha|}{\rho_2}) \\ &\leqslant \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} M(\frac{|x_\alpha|}{\rho_1}) + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} M(\frac{|y_\alpha|}{\rho_2}). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{\alpha\in I} M(\frac{|x_\alpha + y_\alpha|}{\rho}) < \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}\sum_{\alpha\in I} M(\frac{|x_\alpha|}{\rho_1}) + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\sum_{\alpha\in I} M(\frac{|y_\alpha|}{\rho_2}) < \infty.$$

Tức là $x + y \in l_M(I)$.
Nếu $\lambda = 0$ thì $\lambda x = 0 \in l_M(I)$. Nếu $\lambda \neq 0$ thì với $\rho = |\lambda|\rho_1$ ta có

$$\sum_{\alpha\in I} M(\frac{|\lambda x_\alpha|}{\rho}) = \sum_{\alpha\in I} M(\frac{|\lambda||x_\alpha|}{\rho}) = \sum_{\alpha\in I} M(\frac{|x_\alpha|}{\rho_1}) < \infty.$$

Suy ra $\lambda x \in l_M(I)$. Vì vậy $l_M(I)$ là không gian tuyến tính. $\square$

Sau đây ta trong bị chuẩn cho $l_M(I)$.

Mệnh đề 2.3. *$l_M(I)$ là không gian định chuẩn với chuẩn xác định bởi công thức.*

$$\|x\| = \inf\{\rho > 0 : \sum_{\alpha\in I} M(\frac{|x_\alpha|}{\rho}) \leqslant 1\}, \tag{1}$$

với mọi $x \in l_M(I)$.

Chứng minh. Với mỗi $x \in l_M(I)$, rõ ràng

$$\|x\| = \inf\Big\{\rho > 0 : \sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) \leqslant 1\Big\} \geqslant 0.$$

Ta cần chỉ ra $x = 0$ khi và chỉ khi $\|x\| = 0$. Thật vậy, nếu $x = 0$, tức là $x_i = 0$ với mọi $i \in I$. Khi đó, $M(\frac{|x_i|}{\rho}) = M(\frac{0}{\rho}) = 0$ với mọi ρ và vì thế

$$\|x\| = \inf\{\rho > 0\} = 0.$$

Nếu $x \neq 0$ thì ta chỉ ra $\|x\| \neq 0$. Giả sử ngược lại $x \neq 0$ nhưng $\|x\| = 0$. Khi đó, vì $x = (x_i) \neq 0$ nên tồn tại i_0 sao cho $x_{i_0} \neq 0$, suy ra $|x_{i_0}| > 0$. Vì M là hàm Orlicz nên $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = \infty$. Do đó, tồn tại $t_0 > 0$ sao cho $M(t_0) > 1$. Từ giả thiết

$$\|x\| = \inf\Big\{\rho > 0 : \sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) \leqslant 1\Big\} = 0$$

suy ra tồn tại

$$\rho_0 \in \{\rho > 0 : \sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) \leqslant 1\}$$

sao cho $\dfrac{|x_{i_0}|}{\rho_0} > t_0$. Do đó

$$M(\frac{|x_{i_0}|}{\rho_0}) \geqslant M(t_0) > 1.$$

Ta thu được

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho_0}\Big) \geqslant M(\frac{|x_{i_0}|}{\rho_0}) > 1.$$

Điều này mâu thuẫn với

$$\rho_0 \in \{\rho > 0 : \sum_{i\in I} M\Big(\frac{\|x_i\|}{\rho}\Big) \leqslant 1\}.$$

Vì vậy $x \neq 0$ thì $\|x\| \neq 0$. Do đó, $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Để kiểm tra điều kiện tiếp theo của chuẩn ta cần nhận xét sau: *Nếu* $x \neq 0$ *thì*

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\|x\|}\Big) \leqslant 1. \tag{2}$$

Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\rho > 0$ sao cho $\rho \leqslant \|x\| + \varepsilon$ và

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) \leqslant 1.$$

Do tính không giảm của hàm M ta suy ra

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\|x\|+\varepsilon}\Big) \leqslant \sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) \leqslant 1.$$

Cho $\varepsilon \to 0$ ta nhận được

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\|x\|}\Big) \leqslant 1.$$

Tiếp theo ta chỉ ra $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ với mọi $x \in l_M(I)$ và với mọi $\lambda \in \mathbb{K}$. Trường hợp $\lambda = 0$ hoặc $x = 0$ là hiển nhiên. Nếu $\lambda \neq 0$ và $x \neq 0$ thì

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \inf\left\{\rho' > 0 : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|\lambda x_i|}{\rho'}\right) \leq 1\right\}\\ &= \inf\left\{\rho' > 0 : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|\lambda|\,|x_i|}{\rho'}\right) \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

Đặt $\rho = \dfrac{\rho'}{|\lambda|}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \inf\left\{\rho|\lambda| : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) \leq 1\right\}\\ &= |\lambda| \inf\left\{\rho : \sum_{i\in I} M\left(\frac{\|x_i\|}{\rho}\right) \leq 1\right\}\\ &= |\lambda|\|x\|.\end{aligned}$$

Cuối cùng, với $x, y \in l_M(I)$ ta đặt

$$u = \|x\| = \inf\left\{\rho : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) \leq 1\right\}$$

và

$$v = \|y\| = \inf\left\{\rho : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|y_i|}{\rho}\right) \leq 1\right\}.$$

Khi đó

$$\sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i|}{\|x\|}\right) \leq 1 \quad \text{và} \quad \sum_{i\in I} M\left(\frac{|y_i|}{\|y\|}\right) \leq 1.$$

Giả sử $t, s \in \mathbb{R}$ sao cho $s > u$ và $t > v$. Khi đó, ta có

$$\sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i|}{s}\right) \leq \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i|}{\|x\|}\right) \leqslant 1$$

và
$$\sum_{i\in I} M\left(\frac{|y_i|}{t}\right) \le \sum_{i\in I} M\left(\frac{|y_i|}{\|y\|}\right) \le 1.$$

Mặt khác, ta có
$$\frac{|x_i|+|y_i|}{t+s} = \frac{s}{s+t}\frac{|x_i|}{s} + \frac{t}{s+t}\frac{|y_i|}{t}.$$

Suy ra
$$\begin{aligned} M\left(\frac{|x_i+y_i|}{s+t}\right) &\le M\left(\frac{|x_i|+|y_i|}{s+t}\right) \\ &\leqslant \frac{s}{s+t}M\left(\frac{|x_i|}{s}\right) + \frac{t}{s+t}M\left(\frac{|y_i|}{t}\right) \\ &\le \frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t} = 1. \end{aligned}$$

Do đó
$$s+t \in \left\{\rho : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i+y_i|}{\rho}\right) \le 1\right\}.$$

Vì vậy
$$\|x+y\| = \inf\left\{\rho : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i+y_i|}{\rho}\right) \le 1\right\} \le s+t. \tag{3}$$

Vì (3) đúng với mọi $s > |x\|$ và $t > |y|$ nên ta thu được
$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Do đó $l_M(I)$ là không gian định chuẩn. □

Để chứng minh tính Banach của $l_M(I)$ ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 2.4. *Nếu dãy $(x^k) \subset l_M(I)$, trong đó $x^k = (x_i^k), i \in I$ hội tụ tới 0 trong $l_M(I)$ thì $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = 0$ trong $\mathbb{K}$ với mọi $i \in I$.*

Chứng minh. Giả sử khẳng định không đúng. Khi đó, tồn tại $i_0 \in I$ sao cho dãy $(x_{i_0}^k)$ không hội tụ tới 0 trong $\mathbb{K}$. Vì vậy, tồn tại dãy (k_j) và $r > 0$ sao cho $|x_{i_0}^{k_j}| \geqslant r$. Với mỗi $j = 1, 2, ...$, ta có
$$\left\|x^{k_j}\right\| = \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i^{k_j}|}{\rho}\right) \le 1\right\}.$$

Suy ra
$$1 \geqslant \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i^{k_j}|}{\|x^{k_j}\|}\right) \ge M\left(\frac{|x_{i_0}^{k_j}|}{\|x^{k_j}\|}\right) \ge M\left(\frac{r}{\|x^{k_j}\|}\right) \tag{4}$$

với mọi k_j. Cho $k_j \to \infty$ với để ý rằng $\|x^{k_j}\| \to 0$ ta nhận được $M\left(\dfrac{r}{|x^{k_j}|}\right) \to \infty$. Mâu thuẫn với (4). Ta nhận được điều cần chứng minh. □

Định lý 2.5. *$l_M(I)$ là không gian Banach.*

Chứng minh. Giả sử (x^k) là dãy Cauchy trong $l_M(I)$. Ta cần chỉ ra (x^k) hội tụ tới $x \in l_M(I)$. Thật vậy, vì (x^k) là dãy Cauchy nên

$$\left\|x^k - x^l\right\| = \inf\left\{\rho : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i^k - x_i^l|}{\rho}\right) \le 1\right\} \to 0 \tag{5}$$

khi $k, l \to \infty$. Theo Bổ đề 2.4 thì với mỗi $i \in I$ ta có

$$|x_i^k - x_i^l| \to 0$$

khi $k, l \to \infty$. Do đó, (x_i^k) là dãy Cauchy trong $\mathbb{K}$ với mỗi $i \in I$. Vì $\mathbb{K}$ đầy đủ nên $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k := x_i \in \mathbb{K}$. Đặt $x = (x_i)$. Với mọi $\varepsilon > 0$, từ (5) tồn tại k_0 sao cho

$$\left\|x^k - x^l\right\| = \inf\left\{\rho : \sum_{i\in I1} M\left(\frac{|x_i^k - x_i^l|}{\rho}\right) \le 1\right\} < \varepsilon \tag{6}$$

với mọi $k, l \geqslant k_0$. Trong bất đẳng thức trên cố định $k \geqslant k_0$ cho $l \to \infty$ ta nhận được

$$\left\|x^k - x\right\| = \inf\left\{\rho : \sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i^k - x_i|}{\rho}\right) \le 1\right\} < \varepsilon \tag{7}$$

với mọi $k > k_0$. Tức là x^k hội tụ tới x.

Tiếp theo ta chỉ ra $x \in l_M(I)$. Từ (7) ta có

$$\sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i^{k_0} - x_i|}{\rho}\right) \le 1 < \infty,$$

tức là $x^{k_0} - x \in l_M(I)$. Do $l_M(I)$ là không gian tuyến tính nên $x = x^{k_0} - (x^{k_0} - x) \in l_M(I)$. Ta nhận được $l_M(I)$ là không gian Banach. □

Mệnh đề sau như là một ví dụ đẹp về không gian $l_M(I)$.

Mệnh đề 2.6. *Nếu $M(t) = t^p$ $(p \geqslant 1)$ thì $l_M(I) = l_p(I)$.*

Chứng minh. Đầu tiên, ta chỉ ra hai tập hợp $l_M(I)$ và $l_p(I)$ bằng nhau.Lấy x bất kỳ thuộc $l_M(I)$. Khi đó $\sum_{i\in I} M\Big(\dfrac{|x_i|}{\rho}\Big) < \infty$ với ρ nào đó. Vì $M(t) = t^p$ nên ta được $\sum_{i\in I} \Big(\dfrac{|x_i|}{\rho}\Big)^p < K < \infty$ với ρ nào đó. Do đó $\sum_{i\in I} |x_i|^p < K\rho^p < \infty$. Vậy $x \in l_p(I)$. Tức là $l_M(I) \subset l_p(I)$. Chiều ngược lại suy trực tiếp từ định nghĩa.

Bây giờ, ta chỉ ra $\|x\| = \|x\|_p$ với mọi $x \in l_M(I)$. Thật vậy, với mọi $x \in l_M(I)$ ta có

$$\begin{aligned}\|x\| &= \inf\Big\{\rho > 0 : \sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) \leqslant 1\Big\}\\ &= \inf\Big\{\rho > 0 : \sum_{i\in I} |x_i|^p \leqslant \rho^p\Big\}\\ &= \inf\Big\{\rho > 0 : \Big(\sum_{i\in I} |x_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \rho\Big\}\\ &= \inf\Big\{\rho > 0 : |x|_p \leqslant \rho\Big\} = \|x\|_p.\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Tiếp theo ta nghiên cứu một lớp không gian con quan trọng của $l_M(I)$.

Với mỗi hàm Orlicz M và tập chỉ số I, ta đặt

$$h_M(I) = \Big\{x = (x_i) \subset \mathbb{K} : \sum_{i\in I} M\Big(\frac{\|x_i\|}{\rho}\Big) < \infty \text{ với mọi } \rho > 0\Big\}.$$

Mệnh đề 2.7. *$h_M(I)$ là không gian con đóng của $l_M(I)$.*

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh $h_M(I)$ là không gian con của $l_M(I)$. Giả sử $x, y \in h_M(I)$ và $\alpha \in \mathbb{K}$. Khi đó, nếu $\alpha = 0$ thì $\alpha x = 0 \in h_M(I)$.

Nếu $\alpha \neq 0$ thì $\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) < \infty$ với mọi $\rho > 0$. Do đó, với mọi $\rho' > 0$, đặt $\rho = \frac{\rho'}{|\alpha|}$ ta có

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|\alpha x_i|}{\rho'}\Big) = \sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) < \infty.$$

Suy ra $\alpha x \in h_M(I)$.

Từ chứng minh trên ta suy ra $2x, 2y \in h_M(I)$. Do đó $\sum_{i\in I} M\Big(\frac{\|2x_i\|}{\rho}\Big) < \infty$ và $\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|2y_i|}{\rho}\Big) < \infty$ với mọi $\rho > 0$. Với mọi $i \in I$, từ tính lồi của hàm M ta có

$$\begin{aligned}M\Big(\frac{|x_i + y_i|}{\rho}\Big) &\leqslant M\Big(\frac{|x_i| + |y_i|}{\rho}\Big)\\ &= M\Big(\frac{1}{2}\frac{|2x_i|}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{|2y_i|}{\rho}\Big)\\ &\leqslant \frac{1}{2}M\Big(\frac{|2x_i|}{\rho}\Big) + \frac{1}{2}M\Big(\frac{|2y_i|}{\rho}\Big).\end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i + y_i|}{\rho}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|2x_i|}{\rho}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|2y_i|}{\rho}\Big) < \infty.$$

Vì vậy $x + y \in h_M(I)$.

Tiếp theo ta chứng minh $h_M(I)$ đóng trong $l_M(I)$. Giả sử (x^k) là dãy trong $h_M(I)$ và x^k hội tụ tới x trong $l_M(I)$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại k_0 sao cho

$$\|x^k - x\| < \varepsilon \tag{8}$$

với mọi $k \geqslant k_0$. Ta chỉ ra $x^{k_0} - x \in h_M(I)$. Giả sử $x^{k_0} - x \notin h_M(I)$. Khi đó, tồn tại $\rho_0 > 0$ sao cho

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i^{k_0} - x_i|}{\rho_0}\Big) = \infty.$$

Vì vậy, với mỗi $0 < \rho < \min\{\varepsilon, \rho_0\}$, nhờ tính không giảm của hàm M ta có

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i^{k_0} - x_i|}{\rho}\Big) = \infty$$

và vì thế

$$\inf\Big\{\rho > 0 : \sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i^{k_0} - x_i|}{\rho}\Big) \leqslant 1\Big\} > \varepsilon,$$

tức là $\|x^{k_0} - x\| > \varepsilon$. Mâu thuẫn với (8). Vì vậy, k_0 sao cho $x^{k_0} - x \in h_M(I)$. Do đó $x = x^{k_0} - (x^{k_0} - x) \in h_M(I)$. □

Định lý sau mô tả cấu trúc của các không gian $h_M(I)$ và $l_M(I)$ trong trường hợp M suy biến.

Định lý 2.8. *Giả sử M suy biến. Khi đó ta có các khẳng định sau:*
1) $l_M(I)$ đẳng cấu với $l_\infty(I)$;
2) $h_M(I)$ đẳng cấu với $C_0(I)$.

Chứng minh. 1) Mệnh đề 2.1 cho thấy $l_M(I) \subset l_\infty(I)$. Giả sử M suy biến. Khi đó, tồn tại $t_0 > 0$ sao cho $M(t_0) = 0$. Từ tính liên tục của M và $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = \infty$ suy ra tồn tại T_0 là giá trị lớn nhất sao cho $M(T_0) = 0$. Với mọi $x = (x_i) \in l_\infty(I)$ mà $x \neq 0$, ta đặt

$$k = \sup_{i\in I} |x_i| = \|x\|_\infty < \infty.$$

Lấy $\rho = \dfrac{2k}{T_0}$ ta thu được

$$\frac{|x_i|}{\rho} = \frac{T_0|x_i|}{2k} \leqslant \frac{T_0}{2}.$$

Từ tính chất không giảm của $M(t)$ ta có

$$0 \leqslant M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) \leqslant M\Big(\frac{T_0}{2}\Big) = 0$$

với mọi n. Ta nhận được $\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) = 0$. Hay $x = (x_i) \in l_M(I)$. Từ đó suy ra $l_\infty(I) = l_M(I)$.

Để chứng minh $l_M(I)$ đẳng cấu với $l_\infty(I)$ ta còn phải chỉ ra các chuẩn của chúng là tương đương. Để ý rằng $l_\infty(I)$ xét với chuẩn

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in I} |x_i|.$$

Từ chứng minh trên ta có, với $\rho = \dfrac{2k}{T_0}$ thì

$$\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) = 0 < 1$$

và vì thế

$$\|x\| = \inf\{\rho > 0 : \sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) \leqslant 1\} \leqslant \frac{2k}{T_0} = \frac{2\|x\|_\infty}{T_0}.$$

Như vậy,

$$\|x\|_\infty \geqslant \frac{T_0}{2}\|x\| \tag{9}$$

với mọi $x \in l_M(I)$.

Bây giờ, từ

$$\|x\| = \inf\{\rho > 0 : \sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\rho}\Big) \leqslant 1\}$$

suy ra $\sum_{i\in I} M\Big(\frac{|x_i|}{\|x\|}\Big) \leqslant 1$ với mọi $x \in l_M(I)$ và $x \neq 0$. Gọi T_1 là số lớn nhất sao cho $M(T_1) = 1$ (T_1 tồn tại do tính liên tục của M, $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = \infty$ và $M(0) = 0$). Ta có $M\Big(\frac{|x_i|}{\|x\|}\Big) \leqslant 1$ với mọi i. Do tính không giảm của M nên

$$\frac{|x_i|}{\|x\|} \leqslant T_1$$

với mọi i. Ta thu được

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in I} |x_i| \leqslant T_1\|x\| \tag{10}$$

với mọi $x \neq 0$. Bất đẳng thức rõ ràng vẫn đúng với $x = 0$. Từ (9) và (10) suy ra các chuẩn trên $l_\infty(I)$ và $l_M(I)$ là tương đương và vì thế $l_M(I)$ đẳng cấu với $l_\infty(I)$.

2) Vì $C_0(I)$ là không gian con đóng của $l_\infty(I)$ và $h_M(I)$ là không gian con đóng của $l_M(I)$, khi M suy biến $l_M(I)$ đẳng cấu với $l_\infty(I)$ nên để chứng minh $h_M(I)$ đẳng cấu với $C_0(I)$ ta chỉ cần chỉ ra $h_M(I) = C_0(I)$ khi M suy biến.

Giả sử $x = (x_i) \in h_M(I)$. Khi đó $\sum_{i \in I} M\left(\frac{\|x_i\|}{\rho}\right) < \infty$ với mọi $\rho > 0$. Nếu $x \notin C_0(I)$ thì họ $(|x_i|)_{i \in I}$ không hội tụ tới 0. Khi đó, tồn tại tập con vô hạn của J của I và $r > 0$ sao cho $\|x_j\| > r$ với mọi $j \in J$. Lấy $\rho > 0$ sao cho

$$\frac{|x_j|}{\rho} \geqslant \frac{r}{\rho} \geqslant 2T_0$$

với mọi $j \in J$. Từ $\dfrac{|x_j|}{\rho} \geqslant 2T_0$ với mọi $j \in J$, suy ra

$$M\left(\frac{|x_j|}{\rho}\right) \geqslant M(2T_0) > 0$$

với mọi $j \in J$. Do J là tập vô hạn nên $\sum_{j \in J} M\left(\frac{|x_j|}{\rho}\right) = \infty$. Từ $J \subset I$ suy ra $\sum_{i \in I} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) = \infty$. Ta nhận được sự mâu thuẫn với $\sum_{i \in I} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) < +\infty$ với mọi ρ. Vì vậy $h_M(I) \subset C_0(I)$.

Ngược lại, giả sử $x = (x_i) \in C_0(I)$. Ta chỉ ra $x \in h_M(I)$. Thậy vậy, với mọi $\rho > 0$. Khi đó, từ họ $(|x_i|)$ hội tụ tới 0 suy ra tồn tại $J_0 \in \mathcal{F}(I)$ sao cho $|x_i| < \rho T_0$ với mọi $i \in I \setminus J_0$. Hay $\dfrac{|x_i|}{\rho} < T_0$ với mọi $i \in I \setminus J_0$. Vì vậy $M(\dfrac{|x_i|}{\rho}) = 0$ với mọi $i \in I \setminus J_0$. Ta thu được

$$\sum_{i \in I} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) = \sum_{i \in J_0} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) < \infty.$$

Vì vậy $x = (x_i) \in h_M(I)$. Do đó $C_0(I) \subset h_M(I)$. Từ đó ta có $C_0(I) = h_M(I)$. Định lý được chứng minh. □

Ta nhắc lại rằng: Hàm Orlicz M được gọi là thỏa mãn điều kiện Δ_q tại 0 nếu $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{M(qt)}{M(t)} < \infty$ với $q > 0$ nào đó. Hàm Orlicz M thỏa mãn điều kiện Δ_q tại 0 với mọi $q > 0$ khi và chỉ khi thỏa mãn điều kiện Δ_2 tại 0 (xem [3]).

Định lý sau đưa ra một điều kiện để $h_M(I) = l_M(I)$ thông qua điều kiện Δ_2.

Định lý 2.9. *Giả sử M là hàm Orlicz không suy biến. Khi đó, nếu M thỏa mãn điều kiện Δ_2 tại 0 thì $l_M(I) = h_M(I)$.*

Chứng minh. Giả sử M thỏa mãn điều kiện Δ_2 tại 0. Khi đó, M thỏa mãn điều kiện Δ_q với mỗi $q > 0$. Lấy $x \in l_M(I)$. Khi đó, tồn tại $\rho_0 > 0$ sao cho

$$\sum_{i \in I} M\left(\frac{|x_i|}{\rho_0}\right) < \infty.$$

Suy ra họ $\left(M(\frac{|x_i|}{\rho_0}\right)_{i \in I}$ hội tụ tới 0. Do M không suy biến và liên tục tại 0 nên kéo theo họ $\left(\frac{|x_i|}{\rho_0}\right)_{i \in I}$ hội tụ tới 0. Do đó, tồn tại $J_0 \in \mathcal{F}(I)$ sao cho $\dfrac{|x_i|}{\rho_0} < 1$ với mọi $i \in I \setminus J_0$.

Với mọi $\rho > 0$ áp dụng điều kiện Δ_q với $q = \dfrac{\rho_0}{\rho}$, ta tìm được tồn tại $K > 0$ và $0 < \delta < 1$ sao cho

$$M(\frac{\rho_0 t}{\rho}) < KM(t)$$

với mọi $0 < t \leqslant \delta$. Suy ra

$$M(\frac{|x_i|}{\rho}) = M(\frac{\rho_0}{\rho}\frac{|x_i|}{\rho_0}) \leqslant KM(\frac{|x_i|}{\rho_0})$$

với mọi $i \in I \setminus J_0$. Ta thu được

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) &= \sum_{i\in J_0} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) + \sum_{i\in I\setminus J_0}^{\infty} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right)\\ &\leq \sum_{i\in J_0} M\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) + K\sum_{i\in I\setminus J_0} M\left(\frac{|x_i|}{\rho_0}\right) < \infty.\end{aligned}$$

Như vậy $\sum_{i\in I} M(\dfrac{|x_i|}{\rho}) < \infty$ với mọi $\rho > 0$, tức là $x \in h_M(I)$. Do đó $l_M(I) \subset h_M(I)$. Vì vậy $l_M(I) = h_M(I)$. □

Ta nhắc lại rằng với mỗi tập chỉ số I, và với mỗi $i \in I$, đặt $e_i : I \to \mathbb{K}$ xác định bởi $e_i(i) = 1$ và $e_i(j) = 0$ với mọi $j \neq i$. Ta nhận được kết quả quan trọng sau:

Định lý 2.10. *Bao tuyến tính của $\{e_i : i \in I\}$ trù mật trong $h_M(I)$.*

Chứng minh. Rõ ràng $e_i \in h_M(I)$ với mọi i. Vì vậy, từ $h_M(I)$ là không gian con đóng của $l_M(I)$ suy ra $\overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}} \subset h_M(I)$. Giả sử $x = (x_i) \in h_M(I)$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ ta có

$$\sum_{i\in I} M(\frac{|x_i|}{\varepsilon}) < \infty. \tag{11}$$

Vì vậy, tồn tại $J \in \mathcal{F}(I)$ sao cho

$$\sum_{i\in I\setminus J} M(\frac{|x_i|}{\varepsilon}) \leqslant 1.$$

Xét $S_J = \sum_{i\in J} x_i e_i$. Ta có $S_J \in \operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$. Hơn nữa, từ (11) suy ra

$$\|S_J - x\| = \inf\Big\{\rho > 0 : \sum_{i\in I\setminus J} M(\frac{|x_i|}{\rho}) \leqslant 1\} \leqslant \varepsilon,$$

như vậy, $x \in \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}}$. Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.11. Từ Định lý 2.10 suy ra nếu I là tập đếm được thì $h_M(I)$ là không gian khả ly.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Khan Vakeel A. and Lohani Q. M. D., "Some new difference sequences spaces defined by Musielak-Orlicz function", *Thai J. Math.*, 6 , No. 1, 215-223, 2008.

[2] Khan Vakeel A., *On a new sequence space defined by Musielak-Orlicz functions*, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 55, No. 2, 143-149, 2010.

[3] Lindenstrauss J. and Tzafriri L., *Classical Banach spaces. I. Sequence spaces*, Springer - Verlag, Berlin - New York.

[4] Lindenstrauss J. and Tzafriri L., "On Orlicz sequence spaces III", *Israel J. Math.*, 14, 368-389, 1973.

[5] Lindenstrauss J. and Tzafriri L., "On Orlicz sequence spaces II", *Israel J. Math.*, 11, 355-379, 1972.

[6] Lindenstrauss J. and Tzafriri L., "On Orlicz sequence spaces, *Israel J. Math.*, 10, 379-390, 1971.

[7] Meise R. and Vogt D., *Introduction to Functional Analysis*, Claderon Press, Oxford, 1997.

[8] Pietsch A., *Nuclear Locally Convex Spaces*, Springer - Verlag, 1972.

[9] Subramanian N., "The Cesaro convergence of triple chi sequences spaces of fuzzy real numbers defined by a sequence of Musielak-Orlicz function", *Bol. Soc. Parana. Mat.*, (3) 37, No. 2, 145-155, 2019.

SUMMARY

ON THE CLASS OF SPACES OF SUMMABLE FAMILY

In this paper, we construct the Banach space of summable families of numbers. The results are natural extension of the space of number sequences (see [3], [4], [5]).

Keyword: Sumalble families; Orlicz spaces.